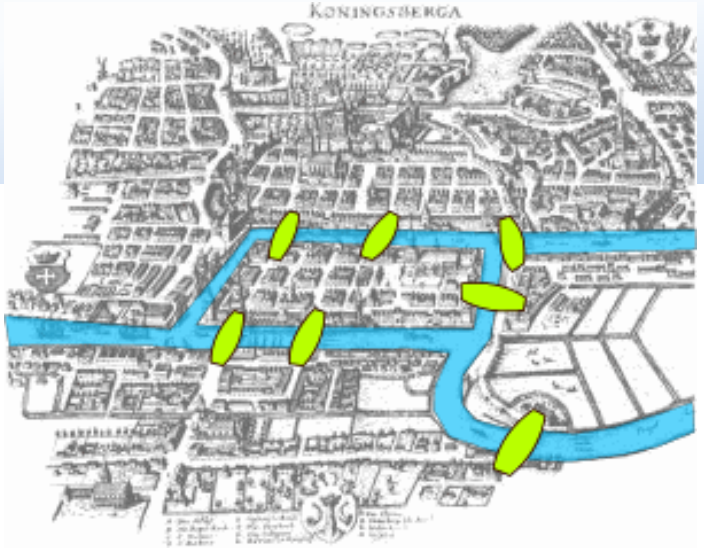
アルゴリズムとデータ構造

第11回　グラフの探索

今日の内容

- グラフ
  - なんでグラフ？
  - グラフの数学的な定義
  - ネットワーク（重み付きグラフ）の定義
- グラフデータの取り扱い方
  - 隣接行列による表現
  - 隣接リストによる表現
- グラフの探索の仕方
  - 幅優先探索
  - 深さ優先探索

ケーニヒスベルクの橋



- ケーニヒスベルクという街には
  プレーゲル川が流れ、
  7つの橋が架かっていた

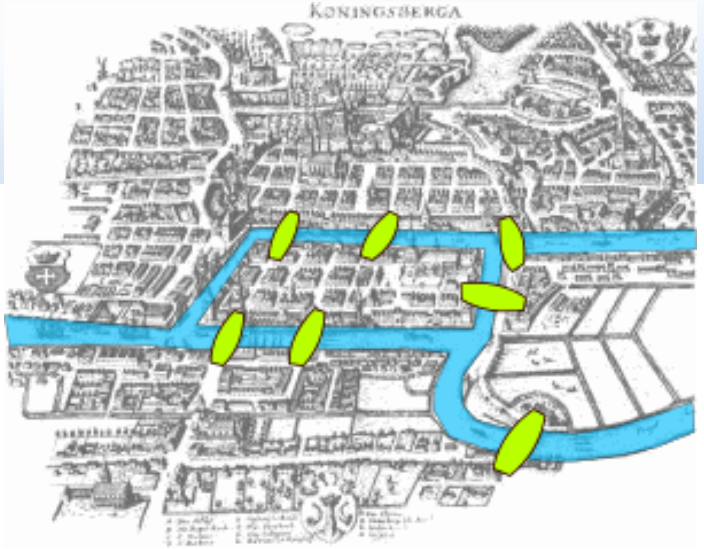
- Q：7つすべての橋を、それぞれちょうど 1 回ずつ渡って歩く
  コースって、ある？

A：ない。
その理由は …

オイラー (Euler) 18世紀の数学者。天文学者や物理学者などでもある。
解析学、整数論、トポロジー、グラフ理論などに大きな足跡を残した。

図は、http://Wikipedia.org より

ケーニヒスベルクの橋



- ケーニヒスベルクという街には
  プレーゲル川が流れ、
  7つの橋が架かっていた

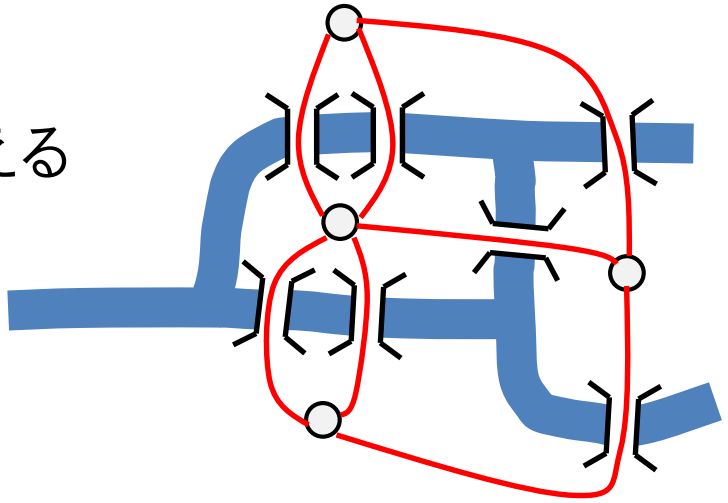
- Q：7つすべての橋を、それぞれちょうど 1 回ずつ渡って歩く
  コースって、ある？

- 川で別れる 4 つの土地を「頂点」、
  橋を「（頂点を結ぶ）辺」に置き換える

  街をグラフで表す

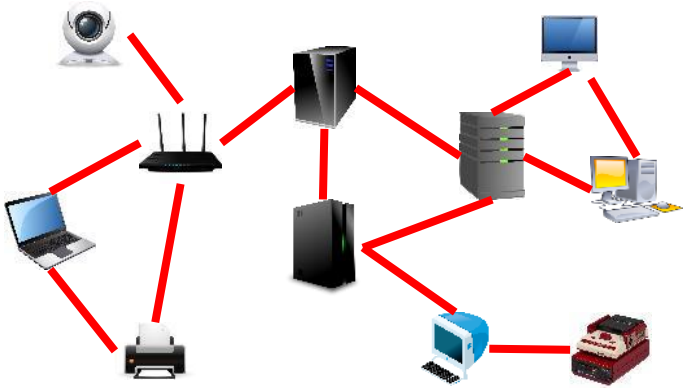
- グラフが一筆書きできる条件は …

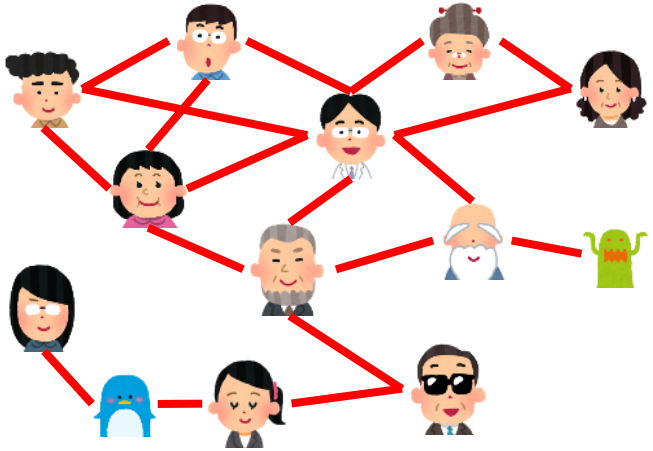
  グラフの性質を調べる

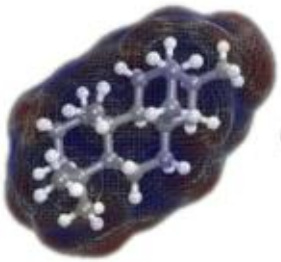


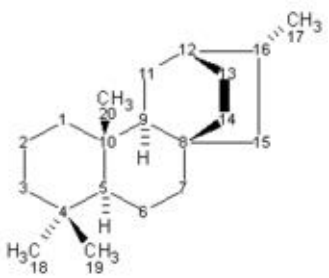
なんでグラフ？

モノとモノのつながりを簡潔に記述し，解析できる！









世の中のすべてはグラフ！

グラフ (graph)　G = (V, E)

頂点 (vertex) の集合 V と

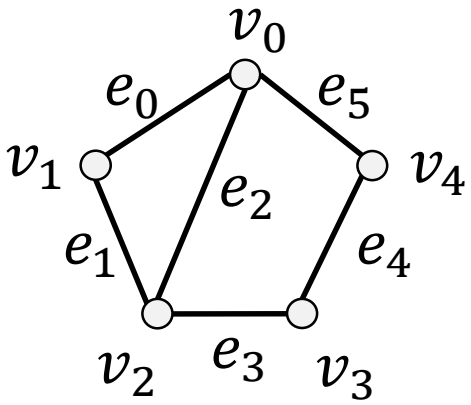
辺 (edge) の集合 $E \subseteq V \times V$ の組 (V, E) のこと

例）$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}, E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$のとき

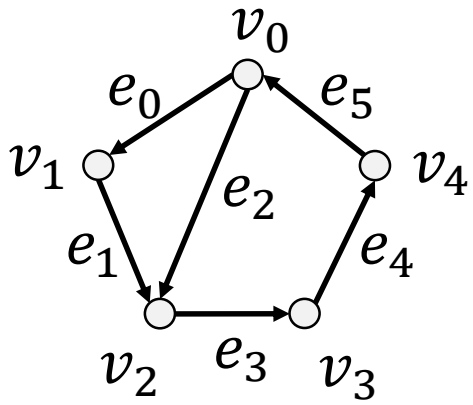
ただし，$e_0 = (v_0, v_1)$，$e_1 = (v_1, v_2)$，$e_2 = (v_0, v_2)$，

$e_3 = (v_2, v_3)$，$e_4 = (v_3, v_4)$，$e_5 = (v_4, v_0)$

無向グラフ (undirected graph)



有向グラフ (directed graph)



有向グラフの場合，辺(u, v)は頂点uから頂点vへの辺（有向辺）を表す

無向グラフでは辺(u, v)を$\{u, v\}$と書く場合もある

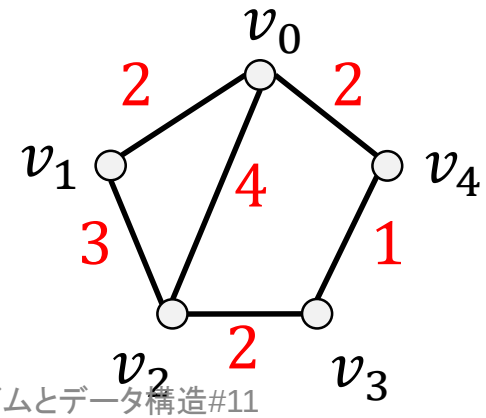
ネットワーク (network)

各辺e_iに重み（整数値または実数値）w_iが付いたグラフのこと．重み付きグラフ (weighted graph).

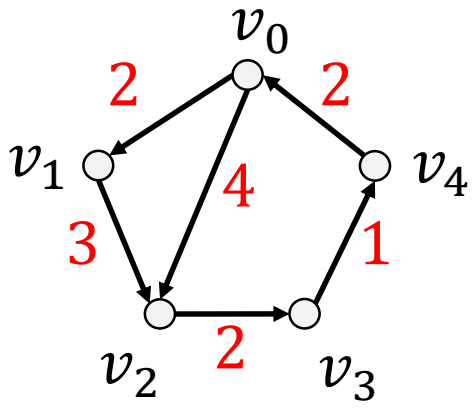
例） $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$のとき

ただし，$e_0 = (v_0, v_1),\ e_1 = (v_1, v_2),\ e_2 = (v_0, v_2),$
$e_3 = (v_2, v_3),\ e_4 = (v_3, v_4),\ e_5 = (v_4, v_0)$
$w_0 = 2, w_1 = 3, w_2 = 4, w_3 = 2, w_4 = 1, w_5 = 2$

無向ネットワーク

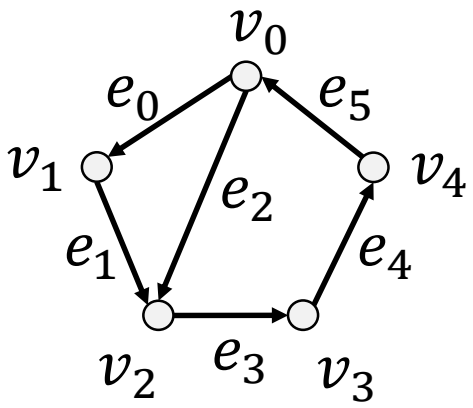


有向ネットワーク



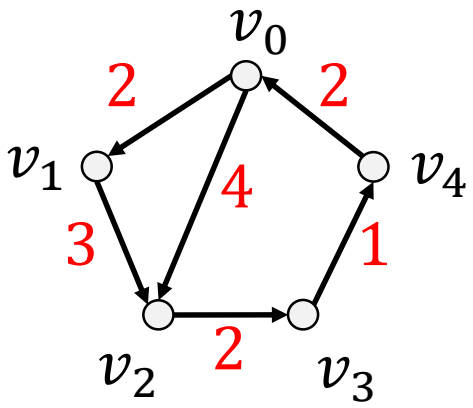
隣接行列 (adjacency matrix) による表現

有向グラフについて，各辺の有無を**行列**で表したもの
（有向ネットワークの場合は重みを要素とした行列）



$$\begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A(i,j) = \begin{cases} 1 & \left((v_i, v_j) \in E\right), \\ 0 & \left((v_i, v_j) \notin E\right) \end{cases}$$



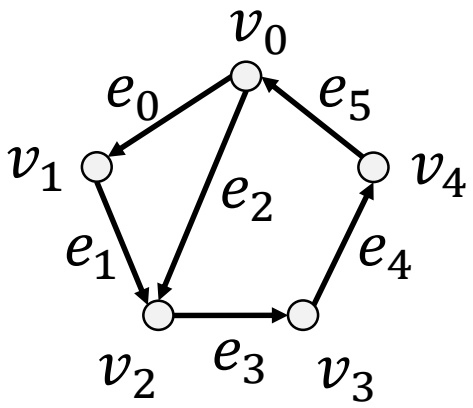
$$\begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

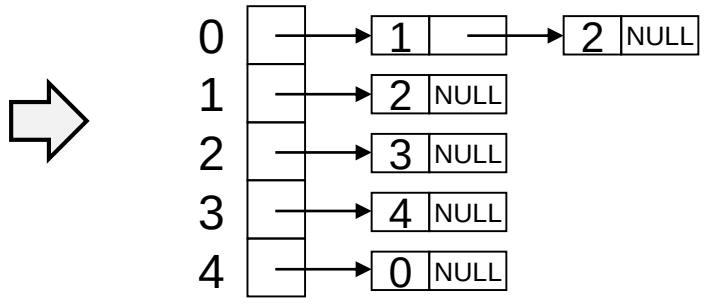
$$A(i,j) = \begin{cases} w_k & \left((v_i, v_j) = e_k \in E\right), \\ 0 & \left((v_i, v_j) \notin E\right) \end{cases}$$

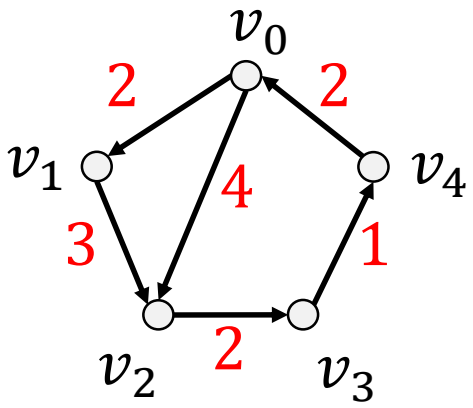
※ 無向グラフの場合は，各無向辺 (u, v) を2つの有向辺 (u, v), (v, u) に置き換えた有向グラフとみなして表現する

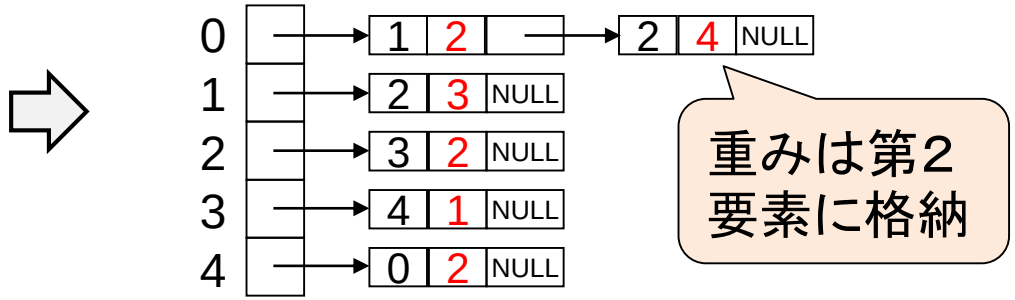
隣接リスト (adjacency list) による表現

有向グラフについて，各辺の有無を**連結リストの配列**で表したもの（ネットワークの場合は重みを付加する）









※ 無向グラフの場合は，各無向辺 (u, v) を2つの有向辺 (u, v), (v, u) に置き換えた有向グラフとみなして表現する

隣接行列と隣接リストの利点，欠点

n = |V|, m = |E|

隣接行列

利点	欠点
2頂点間に辺があるか否かを$O(1)$時間でチェック可能	$O(n^2)$の記憶領域が必要
	1つの頂点の隣接頂点を求めるのに$O(n)$時間必要

隣接リスト

利点	欠点
$O(m)$の記憶領域で済む	2頂点間に辺があるか否かをチェックするのに，隣接頂点数に比例した時間が必要
1つの頂点の隣接頂点を求めるのは，その隣接頂点数に比例した時間だけで可能	

連結リストを線形探索するから

グラフの探索

頂点数nの入力グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとき，
その**すべての頂点を訪問する**こと.

- 入力グラフは，隣接リスト表現で与えられるとする
- 出力として，訪問した頂点の並びを出力する.
  ただし，同じ頂点は2回以上重複して出力しないものとする

応用

- ゲーム（迷路，盤ゲーム），画像処理，etc…

各種グラフ処理の
基本アルゴリズム

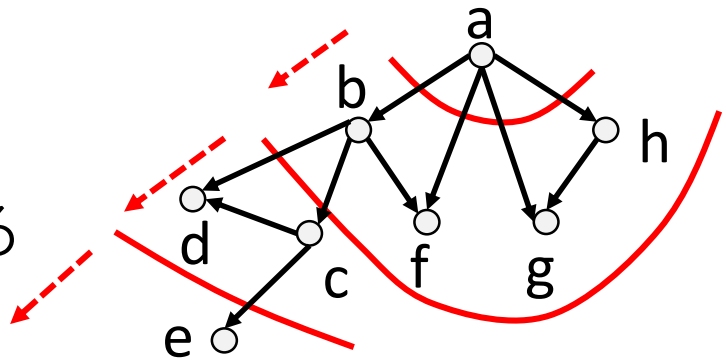
探索法には主に次の2つがある。

1. **幅優先探索** (Breadth-First Search, **BFS**)
2. **深さ優先探索** (Depth-First Search, **DFS**)

幅優先探索の考え方

基本的なアイデア

- ソース（スタート地点となる頂点）sから「波」を伝播させて，波の「先端」(frontier）を横断的に訪問（展開）することで，すべての頂点を探索する



特長

- ソースから近い順番に訪問できる

アルゴリズムの動き

1. ソース s を一つ決め，キュー（FIFO）に入れる
2. キューから一つ頂点 v を取り出して v をたどる
3. v の隣接頂点のうち未訪問（かつ未発見）の頂点をすべてキューに入れる
4. キューが空になるまで2と3を繰り返す

幅優先探索アルゴリズム BFS

```
Procedure BFS (G: グラフ)
1:   for each v ∈ V do 状態[v] ← 白;
2:   Q ← 空のキュー;
3:   状態[s] ← 赤;   // ソースsは適当な頂点
4:   Q.Enqueue(s);
5:   while (Q が空でない) do begin
6:       v ← Q.Dequeue();
7:       v を出力する;  // その頂点を処理
8:       for each (vの隣接頂点u) do
9:           if (状態[u]=白) then
10:              状態[u] ← 赤;
11:              Q.Enqueue(u);
12:          end if
13:      状態[v] ← 黒;
14:  end while
```

頂点vの状態の意味

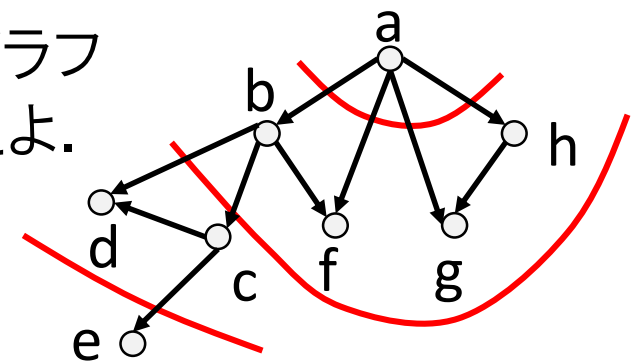
色	意味
白	未訪問
赤	発見済
黒	訪問済

最悪/平均の
時間計算量は $O(n+m)$
(n: 頂点数, m: 辺の本数)

幅優先探索の計算例

問い：右図の隣接リスト表現で与えられるグラフ
GのBFSで出力される頂点リストを与えよ．

解答：a, b, f, g, h, d, c, e



ステップ	訪問 頂点v	vの隣接 頂点リスト	キューQの 内容
0	-		a
1	a	b, f, g, h	b, f, g, h
2	b	d, c, ~~f~~	f, g, h, d, c
3	f	null	g, h, d, c
4	g	null	h, d, c
5	h	~~g~~	d, c
6	d	null	c
7	c	~~d~~, e	e
8	e	null	-

Gの隣接リスト表現

頂点	隣接リスト
a	b, f, g, h
b	d, c, f
c	d, e
d	null
e	null
f	null
g	null
h	g

※ 下線は次に取り出される頂点．赤字は新たに追加された頂点．

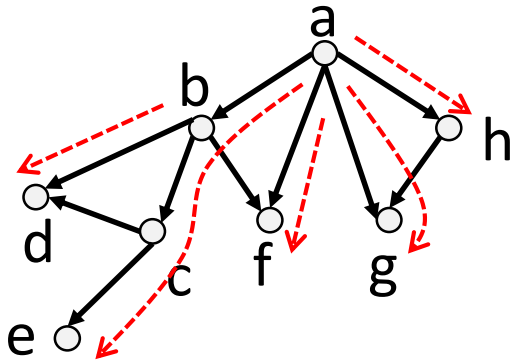
深さ優先探索の考え方

基本的なアイデア

- ソース（スタート地点となる頂点）s から，未発見の頂点を優先的に可能な限り深い方へと探索する

特長

- メモリ使用量が少なくなることが多い
- 特に再帰版は実装が簡単



アルゴリズムの動き

1. ソース s を一つ決め，**スタック**（LIFO）に入れる
2. スタックから一つ頂点 v を取り出して v をたどる
3. vの隣接頂点のうち未訪問（かつ未発見）の頂点をすべてスタックに入れる
4. スタックが空になるまで2と3を繰り返す

深さ優先探索アルゴリズム DFS

幅優先探索 (BFS) と見比べて、変わった場所は？

```
Procedure DFS (G: グラフ)
1:    for each v ∈ V do 状態[v] ← 白;
2:    Q ← 空のスタック;
3:    状態[s] ← 赤;   // ソースsは適当な頂点
4:    Q.Push(s);
5:    while (Q が空でない) do begin
6:        v ← Q.Pop();
7:        v を出力する;  // その頂点を処理
8:        for each (vの隣接頂点u) do
9:            if (状態[u]=白) then
10:               状態[u] ← 赤;
11:               Q.Push(u);
12:           end if
13:       状態[v] ← 黒;
14:   end while
```

頂点vの状態の意味

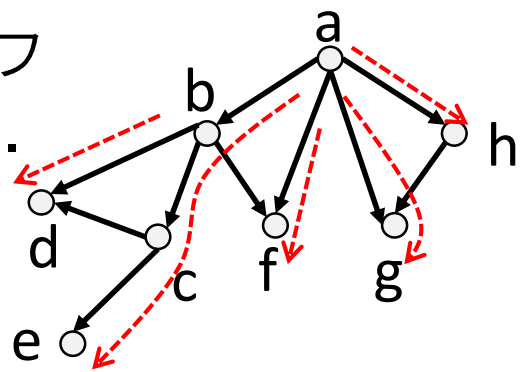
色	意味
白	未訪問
赤	発見済
黒	訪問済

最悪/平均の
時間計算量は $O(n+m)$
(n: 頂点数, m: 辺の本数)

深さ優先探索の計算例

問い：右図の隣接リスト表現で与えられるグラフ
GのDFSで出力される頂点リストを与えよ．

解答：a, h, g, f, b, c, e, d



ステップ	訪問 頂点v	vの隣接 頂点リスト	スタックQの 内容
0	-		a
1	a	b, f, g, h	b, f, g, h
2	h	~~g~~	b, f, g
3	g	null	b, f
4	f	null	b
5	b	d, c, ~~f~~	d, c
6	c	~~d~~, e	d, e
7	e	null	d
8	d	null	-

頂点	隣接リスト
a	b, f, g, h
b	d, c, f
c	d, e
d	null
e	null
f	null
g	null
h	g

※ 下線は次に取り出される頂点．赤字は新たに追加された頂点．

深さ優先探索アルゴリズム DFS（再帰版）

```
Procedure DFS (G: グラフ)
1: for each (v ∈ V) do 状態[v] ← 白;
2: s ←ソース頂点;     // ソースsは適当な頂点
3: Visit(s);                  // 再帰手続きの開始

Procedure Visit(v: 頂点)
1: v を出力する;
2: 状態[v] ← 黒;
3: for each (vの隣接頂点u) do
4:       if (状態[u]=白) then
5:             Visit(u);       //再帰呼び出し
6:       end if
6: end for
```

頂点vの状態の意味

色	意味
白	未訪問
黒	訪問済

このアルゴリズム場合，隣接リストの順に未訪問の頂点を可能な限り深く探索するので，スタックを使うアルゴリズムとは出力順が異なる点に注意

【練習】先の例のグラフGに対してどのような順番で出力されるか？